数理解析研究所講究録 1382 巻 2004 年 171-188

F_4 型 HECKE 環のブロックについて

NAGOYA UNIVERSITY HYOHE MIYACHI (名古屋大学 宮地 兵衛)

この報告では、F_4 型岩堀-Hecke 代数のブロックイデアルの表現型の決定や森田同値を除いて環構造のより正確な記述などができる場合があることをレポートする．また、F_4 に限定した場合と Hecke 環一般に関する質問等を個別に述べる．

1. 序

まず、F_4 型 Hecke 環の定義をしておこう．

Definition 1. R を可逆な元 $u^{\frac{1}{2}}, v^{\frac{1}{2}}$ [1] をもつ整域とする．R 上のパラメータ u, v をもつ F_4 型岩堀-*Hecke* 環 $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{R,u,v}(F_4)$ とは生成元 T_1, T_2, T_3, T_4 と次の関係式で定義される結合的 R-代数である．

$$
\begin{gathered}
(T_i - u)(T_i + 1) = 0 \text{ for } i = 1,2, (T_j - v)(T_j + 1) = 0 \text{ for } j = 3,4, \\
T_iT_iT_i = T_{i+1}T_iT_{i+1} \text{ for } i = 1,3, \\
T_2T_3T_2T_3 = T_3T_2T_3T_2, \\
T_iT_j = T_jT_i \text{ for } 1 \leq i < j-1 \leq 3.
\end{gathered}
$$

(一般の type X の 1-parameter Hecke 環の定義はしないが R 上 parameter u のものを $\mathcal{H}_{R,u}(X)$ と書くことにする．もしくは Weyl 群 W に対して $\mathcal{H}_{R,u}(W)$ と書くことにする．[KL79],[GP00] とかを参照してください．) なんだか $\mathcal{H}_{R,u,v}(F_4)$ の雰囲気がわからんので、すこしコメントを書き足すと R を (簡単のため代数閉) 体として $\mathcal{H}_{R,u,v}(F_4)$ が半単純とすると $\mathcal{H}_{R,u,v}(F_4)$ は F_4 型 Weyl 群 $W(F_4)$ の群環 $R[W(F_4)] = \mathcal{H}_{R,1,1}(F_4)$ に同型になるような 2 変数 u, v で変形した $1152(= 2^7 \cdot 3^2)$ 次元[2] の環になっている．この同型でもって $\mathcal{H}_{R,u,v}(F_4)$ の非同型既約表現は $R[W(F_4)]$ の既約指標で label 付けされるので、(近藤武氏には申し訳ないですが a-関数とのからみもあり) その名前 $\phi_{?,?}$ を Carter の本 [Car85] にあるものを採用する．また、(岩堀-Hecke 環一般に言えることだが) $\mathcal{H}_{R,u,v}(F_4)$ のランクはいつでも 1152 であることもよい性質だ．

1.1. 起源: 元来この環は、どこに現れたのだろうか？$\mathbb{F}_q$ を q-元体とし，G^F を (この場合は standard) Frobenius 写像 F の固定点である $\mathbb{F}_q$-構造をもつ F_4 型有限 Chevalley 群とする．B^F を G^F の Borel 部分群として B^F の自明な加群 $\mathbb{C}_B$ を G^F へ誘導して、その自己準同型環を考えるとそこへ自然に $\mathcal{H}_{\mathbb{C},q,q}(F_4)$ が現れる．

$$
\mathcal{H}_{\mathbb{C},q,q}(F_4) \cong \mathrm{End}_{\mathbb{C}G^F}(\mathrm{Ind}_{B^F}^{G^F}\mathbb{C}_B) \tag{1}
$$

パラメータ u, v が等しくなっているときは 1-parameter 岩堀-Hecke 環と呼ぶ．(この場合は $q = u = v$.) これで終いかというとそうではなく Lie 型の有限群に似たような形で自己準同型環として登場する．たとえば Carter の本 [Car85] の 13 章を見れば (Howlett-Lehrer theory[HL80],[HL94] に関する) データが載っている．

お決まりの情報を書くと G を Frobenius 写像 F による $\mathbb{F}_q$-構造をもつ連結な簡約群とし,P を G の F-stable な放物的部分群で F-sable Levi part L をもつとする.(特に $\exists U_P \triangleleft P$ such that $P^F/U_P^F \cong L^F$.) X を L^F の cuspidal べき単指標に対応する $\mathbb{C}L^F$-加群とする．R_L^G で Harish-Chandra 誘導 (*i.e.* $P^F/U_P^F \cong L^F$ より X を $\mathbb{C}P^F$-加群へ lift してそれを G^F へ誘導する関手) を表すと自己準同型環 $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G^F}(R_L^G(X))$ が、さきに１３章がどうとかと言っていた Hecke 環になるべき代物である．

Date: 2004.

[1] 数理解析研究所講究録 Lusztig program にある堀田先生のコメントの通り安心なむきのため square root を入れておく．こうしておくと分解体となることが知られている．

[2] 3^2 という数字も重要でこれがために Broué's abelian defect conjecture の q-類似も想像できて、実際分かる．

G^F,L^F の type 等の情報と $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G^F}(R_L^G(X))$ が標準的な方法で $\mathcal{H}_{\mathbb{C},?,?}(F_4)$ と同型となるパラメータのとり方を以下に記すと次のようになる:

Type of G^F	Type of L^F	$\mathrm{End}_{G^F}(R_L^G(X))$	Parameters
$F_4(q)$	1	$\mathcal{H}_{\mathbb{C},q,q}(F_4)$	$q-q=q-q$
${}^2E_6(q^2)$	1	$\mathcal{H}_{\mathbb{C},q,q^2}(F_4)$	$q-q=q^2-q^2$
$E_8(q)$	$D_4(q)$	$\mathcal{H}_{\mathbb{C},q,q^4}(F_4)$	$q-q=q^4-q^4$

……(表 1)

2 段目の群の Frobenius 写像は E_6 の Dynkin 図形のグラフ自己同型でひねってある twisted Frobenius 写像といわれるものになっている. Type of L^F が自明なときは X は自明な加群. Type of L^F が $D_4(q)$ ときは X は一意的な cupidal べき単指標に対応する加群[3]. このように、F_4 型の岩堀-Hecke 環は登場してきた. では、なぜ自己準同型環が重要なのかについてコメントしておこう. $R_L^G(X)$ 上、当然ながら $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G^F}(R_L^G(X))$ の作用と $\mathbb{C}G^F$ の作用は可換だ. つまり両側加群として分解することがわかる. したがって $\mathrm{End}_{\mathbb{C}G^F}(R_L^G(X))$ の既約加群の名前で $R_L^G(X)$ の既約部分加群に名前をつけることができる.

2. 係数体を C から正標数をもつ体に取り替える

2.1. Harish-Chandra: 基本的に前章の記号をそのまま引き継ぐ. 素数 ℓ を G^F の位数を割るものとしてひとつ固定する. $\mathbf{k}$ を標数 ℓ の体として、必要なら十分大きく拡大しする. このとき群環 $\mathbf{k}G^F$ の表現論をモジュラー表現論という. $\ell=p$ となるときを等標数のモジュラー表現論といい, $\ell\neq p$ となるときを非等標数のモジュラー表現論という. 両者の様相は、随分違っている.[4] 本報告が、関係するのは後者のほうだ. 以降 $\ell\neq p$ を仮定する. さて、ここで序章 1.1 にあった $\mathbb{C}$ という記号をすべて $\mathbf{k}$ に置き換えて読み直して頂きたい. 式 (1) は、次のようにかわる.

$$\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)\cong\mathrm{End}_{\mathbf{k}G^F}(\mathrm{Ind}_{B^F}^{G^F}\mathbf{k}_B) \tag{2}$$

ここでパラメータ q は $q\cdot 1_{\mathbf{k}}\in\mathbb{F}_\ell^\times$ のことを意味している. 他にも 2 つの場合が表に記されていた. そこでは X が意味を持つかどうかが問題となるが $G^F=E_8(q), L^F=D_4(q)$ となっている場合は L^F の cuspidal べき単指標を ℓ-modular reduction [5] したものは再び既約になることが, $p\neq 2$ と仮定すると川中氏の generalized Gelfand-Graev 指標 [Kaw86] を使うことで分かっている [GP92]. なので序章 1.1 に書いたことは大体すべて $\mathbb{C}$ のときとおなじように機能している. ただし、完全可約性が崩れるため、端的に違うところをあげれば既約 $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$-加群の非同型類の個数が $\sharp\mathrm{Irr}\mathbb{C}W(F_4)=25$ よりも少なくなる.

さて、これだけ前置きをしたので、次の仮定は自然と思えてくるだろう.

仮定: パラメータのとり方は,(表 1) にあるものと仮定する. ($p\neq 2$ は Hecke 環には関係ない)

2.2. 既知の事柄: $\mathfrak{S}_3$ の岩堀-Hecke 環 $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v),v}(A_2),\mathcal{H}_{\mathbf{k},-1}(A_2)$ を考えてみよう. よく知られるように $\mathfrak{S}_3$ の既約指標は 3 の分割でラベルされて, (3) でラベルされる自明な指標, (1^3) でラベルされる sgn 指標と $(2,1)$ でラベルされる鏡映表現に対応する 2 次の指標だ. これらの表現を $v\to -1$ と特殊化するとどうなるだろうか?

(i) 定義から自明な指標と sgn 指標は同じ値になってしまう.
(ii) $(2,1)$ に対応するものは、そのまま既約になることが、わかる.

この情報を行列にして次のようにあらわす慣わしだ:

$$\begin{array}{c|cc} (3) & 1 & . \\ (2,1) & . & 1 \\ (1^3) & 1 & . \end{array}$$

[3] 加群の存在が言えてるだけでナイーヴに加群が構成できているわけではない. ℓ-進コホモロジー群を使って指標の存在があるためにいえていることである. このあたりコンクリートに加群が作れている場合とそうでない場合は、ℓ-モジュラー表現論にとってかなり重要なポイントである. $GL_n(q)$ のとき Dipper-James のアルゴリズムが機能する理由は Gelfand から始まる (べき単ではない) cuspidal 加群がきちんと作れていることに行き着く.

[4] GL_n のときは、つながるトリックがある.

[5] 技術的な言葉だが、要は標数ゼロの体上の加群の係数を mod ℓ して $\mathbf{k}$ 上の加群を作る仕組みくらいに思ってください.

特に $\mathcal{H}_{\mathbf{k},-1}(A_2)$ の非同型既約表現は、2つであることが分かる[6]. この行列を分解行列という. 今は Hecke 環を扱っていたが、このことは群環一般について成り立ち $\mathbf{k}G^F$ についても同様の分解行列が定義できる. これらの分解行列は、大変基本的重要事項でこのことが分かれば既約加群の次元がわかることになる. しかしながら、一般の G^F の場合ではこの行列は分かっていない (open problem) [7]. さて Hecke 環の分解行列と G^F のそれだが、つぎのことが知られている:

(壱) $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ の分解行列は (表 1) において対応する $\mathbf{k}G^F$ の分解行列の部分行列.
(弐) $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ の分解行列は, $q \in \mathbb{C}$ か $q \in \mathbb{F}_\ell^\times$ の仮定のもとで
- (a) 1-parameter のときは Geck-Lux [GL91] において計算されている.
- (b) unequal parameter のときは Bremke [Bre94] において計算されている.

なので Hecke 環のほうは Grothendiek 群レベルの話は、よく分かっている.

3. 目的と動機

3.1. 目的は, 仮定のもとで $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ の表現論をアルチン環の言葉で精密化することである. また, 2.2 の (壱) の埋め込みも精密化することでもある. ここで、アルチン環の言葉とは、$\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ の basic ring Λ の quiver と relation を決めることや, 半単純, 有限型, tame 型, wild 型等の表現型を決定することなどである. ここで basic ring の意味であるが、Λ の既約表現はすべて 1 次元で, $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ の加群の圏と Λ のそれが圏同値になるものをさしている. なのでアルチン環の言葉では, up to 圏同値でものをみるため $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v),v,v}(F_4)$ という環は $\mathbb{Q}(v)^{\oplus 25}$ という環と思っていることになる. (つまり体が 2 5 個あるだけの環.) [8]

3.2. Poincaré 多項式. もうひとつの動機を述べるためにも Poincaré 多項式をみておこう. v を不定元として 岩堀-Hecke 環 H_v に対して群環でいう自明な表現に対応する index 表現を $\mathrm{ind}: H_v \to \mathbb{Q}(v)$ と書いて

$$P_H(v) := \sum_{w \in W} \mathrm{ind}(w)$$

とおく, H_v の Poincaré 多項式と呼ばれる. $H_v = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v),v,v}(F_4)$, $H_v = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v),v,v^2}(F_4)$, $H_v = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v),v,v^4}(F_4)$ と 3 通りをこの報告では、考えていた. 具体的には、$\mathbb{Q}$ 上の第 i 円分多項式 $\Phi_i(v)$ たちの積に分解すると次のようになる:

$$\begin{aligned}
&H_v = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v),v,v}(F_4): && P_{H_v}(v) = \Phi_2^4 \cdot \Phi_3^2 \cdot \Phi_4^2 \cdot \Phi_6^2 \cdot \Phi_8 \cdot \Phi_{12}, \\
&H_v = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v),v,v^2}(F_4): && P_{H_v}(v) = \Phi_2^4 \cdot \Phi_3^2 \cdot \Phi_4^2 \cdot \Phi_6^3 \cdot \Phi_8 \cdot \Phi_{12} \cdot \Phi_{18}, \\
&H_v = \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v),v,v^4}(F_4): && P_{H_v}(v) = \Phi_2^4 \cdot \Phi_3^2 \cdot \Phi_4^2 \cdot \Phi_6^3 \cdot \Phi_8 \cdot \Phi_{10}^2 \cdot \Phi_{12}^2 \cdot \Phi_{18} \cdot \Phi_{20} \cdot \Phi_{30}.
\end{aligned} \tag{3}$$

3.3. Andersen-Kaneda. 以降 e を q の $\mathbf{k}$ での乗法的位数とする.

Theorem 2 (Geck). *ℓ は有限 Weyl 群 W に対して bad ではないとする. $\chi, \psi \in \mathrm{Irr}(W)$ がパラメータを $q \cdot 1_{\mathbf{k}}$ に特殊化された W に付随する岩堀-Hecke 代数のあるブロックに属するとすると, χ, ψ の generic degree polynomial $D_\chi(v), D_\psi(v)$ の Φ_e-height* (i.e. $D_\chi(v)$ を $\Phi_e(v)$ が割り切る回数と $D_\psi(v)$ を $\Phi_e(v)$ が割り切る回数) は、等しい.

この定理があるので次が定義できる:

---

[6]岩堀-Hecke 環は、Frobenius 環 (もっと強く対称多元環) であるので正則表現に既約表現の非同型類がすべて現れる.

[7]Hecke 環 $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(W)$ の場合は分解定数は非常に大雑把な評価として $|W|$ で上から押さえられる. G^F のほうは同じように $|G^F|$(q の多項式) で上から押さえられる. しかしここまでしか分かっていない. つまり q と独立に定まることすら言えていないのである. このことが一般に解けているのは A 型の場合のみである. $G^F = F_4(q)$ ではべき単ブロックのうち不足群が巡回群となる場合と $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)$ が半単純になる場合を除いて, 未だにべき単ブロックの分解定数が完全には決まっていない.

[8]ここで環論のひとではない表現論/群論の方々は、猛烈な拒絶反応が起こる. 自分が尊敬する諸先生方の中には、[なんじゃそりゃ] や [寒々としてきた] 等のコメントを述べていた. 確かにお気持ちは察する. というのは指標の値や次元という概念がなくなって、いままで主要目的だったことがらがすべて度外視されるからだ. もっと言えばセールの線形表現の本を読んで、指標が分かって嬉しいと述べていた学生に、その嬉しさを切り捨てなさいというようなものである. だが岩堀-Hecke 環だってこの方向の一例であることを忘れてはならない. というのは、べき単指標の次数は q の多項式で与えられ莫大であるにもかかわらず岩堀-Hecke 環のほうは、つねに一定の次数の既約指標だ. 加えて、今回主につかうのは Geck-Pfeiffer による岩堀-Hecke 環の指標理論である.

Definition 3. W を有限 *Weyl* 群として, $q \in \mathbf{k}^\times$ を原始 e-乗根とする. B を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(W)$ のブロックイデアルとするとき

$$\mathrm{wt}_e(B) := \max\{i \in \mathbb{N}_0 \mid P_{\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v)},v}(v)/\Phi_e(v)^i \in \mathbb{Z}[v]\} - \mathrm{ht}_e(\phi)$$

ここで, $\mathrm{ht}_e(\phi)$ は ϕ の Φ_e-*height* であり, $\phi \in \mathrm{Irr}(W)$ で B に属するもの. $\mathrm{wt}_e(B)$ を B の Φ_e-*defect* とか *e-weight* とと呼ぶ. A 型で言えば *Young* 図形から *e-core* にいたるときに何回 *e-hook* を取り外したかということ.

B を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ のブロックイデアルとする. このとき B に対してある $\mathbf{k}G^F$-加群 M が存在して次が明らかに成り立つ:

(i) $\mathrm{End}_{\mathbf{k}G^F}(M) = B$.
(ii) M は、$\mathbf{k}G^F$ のブロックイデアル A に属する.

さて、もうひとつの動機が述べられる.

Conjecture 4. 上の記号を使って A の不足群がアーベル群とする.

(i) 各直既約射影 B-加群の *Loewy length* [9] は一定である.
(ii) $e > 2$ と仮定する. このとき、各直既約射影 B-加群の *Loewy length* は $2 \cdot \mathrm{wt}_e(B) + 1$ に等しい.

Conjecture 5. B_0 を $\mathbb{Q}(\zeta_e)$ 上のパラメータが $\zeta_e (\in \mathbb{C})$ に特殊化された岩堀-*Hecke* 環とする.

(i) 各直既約射影 B_0-加群の *Loewy length* は一定である.
(ii) $e > 2$ と仮定する. このとき、各直既約射影 B_0-加群の *Loewy length* は $2 \cdot \mathrm{wt}_e(B) + 1$ に等しい.

この予想は、$\mathrm{wt}_e(B) = 1$ では正しい. また, 有限 Weyl 群 W_1, W_2 の Hecke 環について予想が正しいとすると,$W_1 \times W_2$ の Hecke 環についても正しいことが分かる. またすべての $\mathrm{wt}_e(B) = 2$ となる 1-parameter の例外型で確認が取れる. また、いくらでも大きい $\mathrm{wt}_e(B)$ については古典型では Rouquier のブロックと呼ばれる場合については正しいことが示されている. (A 型では [Chu99],[CK02],[Tur02] [Miy01c] ([CT02],[LM02],[HM00]) B 型では [DJ92] により A 型の tensor 積として実現できる場合は正しい. つまり、本質的には A 型の場合のみで分かっている.) また、この予想の希少性についてだが、一般に G を有限群 (例えば有限単純群) として群環 $\mathbf{k}G$ を考え B を $\mathbf{k}G$ のブロックイデアルとしてとったときに Conjecture 4(i) の反例などいくらでも (無限に) ある.

なぜ Andersen-Kaneda という名がついているのかは, Andersen-Kaneda[AK89] にある. 実は Andersen-Kaneda のように Loewy 列の length という情報と Lusztig 予想をつなげたように、これの真似を Hecke 環版でしたかったのでこのあたりをそぞろ見てみたわけだ. だが、端的にいうと $\mathcal{H}_{\mathbf{k},-1}(A_3)$ を考えてみる. (ブロックはひとつしかない.) この Hecke 環の分解定数は実は $\mathbf{k}$ の標数にはよらない. しかし, $\mathrm{char}\mathbf{k} = 2$ のときとそうでないときでは、直既約射影的加群の Loewy length が違うのである [EN02]. (こういった判定を高次ランクでするのは、きわめて難しい. つまり Grothendiek 群レベルの話に加群の情報を加味しようとするのは難しいのである[10].)

4. 表現型

表現型に関するもろもろの用語は、本講究録の有木氏の稿及び [Aria] を参照してください. [Erd90] くらいはあげておかないと失礼ですね. [special biserial ⇒ tame 型] というのが、使いたいことの一つです。

4.1. 仮定.

(i) 以降係数体 $\mathbf{k}$ の標数は、2, 3 でないとする.(本質的なもので、分解定数が左セル等で影響を受ける [Gyo96].)
(ii) 2.1 にあった仮定も忘れてはならない.(群との関係から)
(iii) 特殊化するパラメータは $q \in \mathbb{C}^\times$ もしくは $q \in \mathbb{F}_\ell^\times$ をみたす.(分解行列が知られているという理由からのもので本質的とは限らない.)

---

[9] 有限次元 $\mathbf{k}$-代数 R が与えられたとする. R の Jacobson radical J を考える. 有限次元 R-(左) 加群 M を与えると $J \cdot M \subsetneq M$ となるため $J^0M \supset \cdots \supset J^iM \supset J^{i+1}M \supset \cdots$ なる有限列ができるがこれの長さのことを M の Loewy length という.

[10] その意味でも Andersen-Kaneda の仕事はかっこいい.

4.2. 半単純. 一般論 Gyoja-Uno[GU89],Geck-Roquier[GR97] もしくは F_4 に特化した情報で Geck-Lux[GL91], Bremke[Bre94] を使うと $H_v(q) \neq 0$ ならば半単純で、先に述べた動機の意味でなにもすることがない. 山根 [Yam89] もしくは F_4 に特化した情報で Geck-Lux[GL91],Bremke[Bre94] を使うと既約射影的加群がみつかる. このブロックについても先に述べた動機の意味ですることはない.

4.3. 非半単純有限表現型. ブロックイデアル B が半単純ではなく, 非同型直既約 B-加群の同型類の個数が有限, *i.e.* 有限表現型のときは、次のように特徴づけられる[11].

Proposition 6. $r \in \{1,2,4\}$ とする. B を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ のブロックイデアルとする. 次は同値:

(i) B は非半単純, 有限表現型,
(ii) $\mathrm{wt}_e(B) = 1$.
(iii) B は *Brauer tree algebra* でしかも一直線の *tree* に対応する.

このことは、分解行列 Geck-Lux[GL91],Bremke[Bre94] と [Uno92] を組み合わせるとすぐにでる.

4.4. さて、4.2,4.3 と 3.2 の式 (3) をみると Poincaré 多項式に Φ_i が 2 つ以上でる場合だけが問題となる. 一言宇野氏の早い時期の予想 [Uno92] を述べておこう:

Conjecture 7 (Uno). H_v を *1-parameter generic* 岩堀-*Hecke* 環とする. (*parameter* は、単純鏡映ごとに等しい.) $q \in \mathbf{C}^\times$ とする. 次は同値ではないか？

(i) H_q は有限表現型,
(ii) q は $P_{H_v}(v)$ の単根もしくは根ではない.

これを見れば、だれでも正標数の場合も自然に思いつき宇野氏の予想は 4.1. 仮定 (i),(iii) くらいを仮定すれば、証明ができている [Arib],[Miy01b]. Proposition 6 の (iii) から (i) は、本質的に宇野氏の仕事である. さて、そうすると有限表現型ではない場合、*i.e.* 無限表現型の場合は tame 型になるのか wild 型になるのかを考えるのは自然な問いである. tame や wild の言葉については本研究集会で有木氏が述べていたのでその部分を参照されたし. 一応無限表現型のブロックのクラスを述べておくと

Proposition 8. $r \in \{1,2,4\}$ とする. B を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ のブロックイデアルとする. 次は同値:

(i) B は無限表現型,
(ii) $\mathrm{wt}_e(B) > 1$.

4.5. 非有限型 tame 型,wild 型. $r \in \{1,2,4\}$.

Theorem 9. B を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ のブロックイデアルとする. 次の (i),(ii) と (iii) は同値:

(i) B は *tame* 型で有限型ではない
(ii) B は *special biserial (tame* 型*)* で有限型ではない
(iii) B は次の何れかを満たす:
  (a) $r = 1, \phi_{4,1} \in B, e = 2$.
  (b) $r = 2, \phi_{1,0}$ *or* $\phi'_{2,4} \in B, e = 4$ [12].
  (c) $r = 4, \phi'_{2,4} \in B, e = 8$.

上記定理にある B は、森田同値を除いて完全に理解されたといえる. quiver と relations もわかる. また、残り無限表現型は Drozd の分類で wild 型に属することを示しているもいることを意味する. 詳しくは, 次節により場合わけで調べる.

5. ブロックイデアルの構造

さて、この節ではブロックイデアルの構造を (著者自身の能力できた限り) 詳しく考察する. まず、r のとり方がいろいろあったが、同型となる場合も含まれているのでそのソートをしておく.

[11] 実は 4.1 の仮定 (iii) はいらない.
[12] 実は、この主ブロックは現在までに岩堀-Hecke 環にあらわれるブロックの basic 代数が tame 型となるもののうち最大 (次元) となるものである. 僕自身の当初の予想は、みんな古典型内からくるものしかないだろうと思っていた.

5.1. 同型なもの. つぎは、必要なら生成元をスカラー倍でひねっることによりすぐにわかる:

Lemma 10. (i) $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^2}(F_4) \cong \mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^4}(F_4)$ *if* $\Phi_2(q) = q+1 = 0$.
(ii) $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4) \cong \mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^2}(F_4) \cong \mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^4}(F_4)$ *if* $\Phi_3(q) = q^2+q+1 = 0$.
(iii) $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^2}(F_4) \cong \mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^4}(F_4)$ *if* $\Phi_6(q) = q^2-q+1 = 0$.

この同型をもって以下では r が小さいほうのみを採用して記述する.

5.2. $r=1$ のとき. $r=1$ のときは、1-parameter Hecke 環を扱うので既約加群の label 付けが Geck[Gec98] にある. この label 付けをもって ϕ? に対応する既約加群を φ? と書くことにする. [13] また、この場合は [GR01] にある直既約射影的加群の filtration の情報も使える. [14]

5.2.1. $e=3$ のとき. $\mathrm{wt}_e(B) > 1$ なるブロックイデアルは $\phi_{1,0} \in B$ か $\phi_{4,1} \in B$ となる. [Miy01a] から 2 つ書くと

Theorem 11. *Let* $\mathbf{k}$ *be a field with* $1+q+q^2 = 0$ *in* $\mathbf{k}$. *Then, the principal block of* $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)$ *is isomorphic to* $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(A_2) \otimes_{\mathbf{k}} \mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(A_2)$. *The correspondence at the basis level via this isomorphism is given as follows:*

Let $\{T_w \mid w \in W(F_4)\}$ *be the standard basis for* $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)$. *Let* $e_0 \in Z(\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4))$ *be the principal block idempotent of* $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)$. *Put* $a_s := e_0 T_s$ *for simple reflections* $s \in \{s_1, s_2, s_3, s_4\} = S(F_4)$. *Then,* $\{a_s \mid s \in S(F_4)\}$ *satisfy the following:*

$$\begin{aligned}
(a_{s_i} - q)(a_{s_i}+1) &= 0\\
a_{s_1}a_{s_2}a_{s_1} &= a_{s_2}a_{s_1}a_{s_2}\\
a_{s_3}a_{s_4}a_{s_3} &= a_{s_4}a_{s_3}a_{s_4}\\
a_{s_i}a_{s_j} &= a_{s_j}a_{s_i} \ \textit{for} \quad |i-j|>1\\
a_{s_2}a_{s_3} &= a_{s_3}a_{s_2}
\end{aligned}$$

Theorem 12. B を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)$ のブロックで, $\phi_{4,1}$ が属するとする. B は $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)$ の主ブロックに森田同値.

なので、この場合は、環構造が森田同値を除いて完全に把握された. とくに、

Proposition 13. *Conjecture 4, Conjecture 5* は正しい.

5.2.2. $e=4$. $\mathrm{wt}_e(B) > 1$ となる $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)$ のブロックイデアル B は, 主ブロックのみである.

Proposition 14. B を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ の主ブロックとする. 直既約射影的 B-加群の *Loewy* 列は次のようになる:

$$P(\varphi_{1,0}): \begin{bmatrix} \varphi_{1,0}\\ \varphi_{9,2}\\ \varphi_{1,0}\varphi_{4,1}\varphi'_{6,6}\\ \varphi_{9,2}\\ \varphi_{1,0}\end{bmatrix}, P(\varphi_{4,1}): \begin{bmatrix} \varphi_{4,1}\\ \varphi_{9,2}\\ \varphi_{1,0}\varphi_{4,1}\varphi_{12,4}\\ \varphi_{9,2}\\ \varphi_{4,1}\end{bmatrix}, P(\varphi_{9,2}): \begin{bmatrix} \varphi_{9,2}\\ \varphi_{1,0}\varphi_{4,1}\varphi_{12,4}\varphi'_{6,6}\\ \varphi_{9,2}\varphi_{9,2}\varphi_{9,2}\\ \varphi_{1,0}\varphi_{4,1}\varphi_{12,4}\varphi'_{6,6}\\ \varphi_{9,2}\end{bmatrix}.$$

他は, *Goldman involution* ([DJ89, p.24] にある $\sharp$ のこと, ind と sgn を入れ替える) により得る.

Proposition 15. *Conjecture 4, Conjecture 5* は正しい.

[13] 実は、まだ理論ができていないが、unequal parameter の場合も F_4 ではどうも話がうまくいっている. ともかく、この方向の一般論の作成には, [Lus03] にある 15 個の予想がとかれることが必要なようだ.

[14] この filtration は、A, B 型のときの Specht filtration より強い条件を与えている. ただし 1-parameter 限定でしか現在はつかえない.

5.2.3. $e=6$. $\mathrm{wt}_e(B)>1$ となる $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)$ のブロックは主ブロックのみで、既約 B-加群は $\varphi_{1,0},\varphi'_{2,4},\varphi''_{2,4},\varphi'_{8,3},\varphi''_{8,3},\varphi_{12,4},\varphi'_{9,6},\varphi''_{9,6}$ の計 8 つ非同型なものがある.

Proposition 16. B を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)$ の主ブロックとする. 直既約射影的加群の *Loewy* 列はつぎのようになる:

$$P(\varphi_{1,0}):\begin{bmatrix} \varphi_{1,0} \\ \varphi'_{8,3}\ \varphi''_{8,3} \\ \varphi_{1,0}\ \varphi'_{2,4}\ \varphi_{12,4}\ \varphi''_{2,4}\ \varphi_{1,0} \\ \varphi'_{8,3}\ \varphi''_{8,3} \\ \varphi_{1,0} \end{bmatrix}, P(\varphi'_{2,4}):\begin{bmatrix} \varphi'_{2,4} \\ \varphi'_{8,3} \\ \varphi_{1,0}\ \varphi'_{2,4}\ \varphi'_{9,6} \\ \varphi'_{8,3} \\ \varphi'_{2,4} \end{bmatrix}, P(\varphi'_{8,3}):\begin{bmatrix} \varphi'_{8,3} \\ \varphi'_{2,4}\ \varphi_{1,0}\ \varphi_{12,4}\ \varphi'_{9,6} \\ \varphi'_{8,3}\ \varphi''_{8,3}\ \varphi'_{8,3} \\ \varphi'_{2,4}\ \varphi_{1,0}\ \varphi_{12,4}\ \varphi'_{9,6} \\ \varphi'_{8,3} \end{bmatrix}.$$

他は *Goldman involution* とグラフ自己同型 [BGK97] によって得られる.

Proposition 17. *Conjecture 4,Conjecture 5* は正しい.

5.3. $r=2$ **のとき.**

5.3.1. $e=2$ のとき. この場合は、$\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,1}(F_4)\cong\mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(D_4).\mathfrak{S}_3$ となり、$\mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(D_4)$ の quiver と relation から [RR83] を使って $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,1}(F_4)$ の情報が復元できる.(Clifford theory). ここの拡大する部分は千葉大の吉田憲秀氏に手伝ってもらった. ともかく D_4 の場合が分かればよいので, $q=-1$ の場合限定のトリック ($e=4,r=2$ のときに詳しく書くのでそこを参照) を使ってこの場合を頑張って計算すると quiver と relation が計算できる. 既約加群の label 付けは Geck[Gec98] を採用すると,

Proposition 18. $\mathcal{H}_{\mathbf{k},-1}(D_4)$ の非同型既約加群の同型類は 2 つある. 直既約射影的加群 $P(.4)$,$P(1.3)$ の *Loewy* 列は次のようになる:

$$P(.4):\begin{bmatrix} (.4) \\ (.4)(1.3)(1.3) \\ (.4)(.4)(.4)(.4) \\ (1.3)(1.3)(1.3)(1.3)(1.3) \\ (.4)(.4)(.4)(.4)(.4)(.4)(.4)(.4) \\ (1.3)(1.3)(1.3)(1.3)(1.3) \\ (.4)(.4)(.4)(.4)(.4) \\ (1.3)(1.3) \\ (.4) \end{bmatrix}, P(1.3):\begin{bmatrix} (1.3) \\ (.4)(.4) \\ (1.3)(1.3)(1.3) \\ (.4)(.4)(.4)(.4)(.4) \\ (1.3)(1.3)(1.3)(1.3)(1.3) \\ (.4)(.4)(.4)(.4)(.4) \\ (1.3)(1.3)(1.3) \\ (.4)(.4) \\ (1.3) \end{bmatrix}$$

この結果は、計算機を使っている. [GP00] にある岩堀-Hecke 環の指標理論から中心的べき等元計算してしまう. GAP version 3 release 4 [S+95] のパッケージ CHEVIE [GHL+96] には、指標表や standard bases T_w が実装されている. 使わなくても原理的に手で計算できることは確認したが、$W(D_4)$ の位数は 192 なので standard bases T_w たち線形結合の積を計算するのに使う. (なので実質手でやるのは無理だ.) MeatAxe 等のように特別な条件にのみ有効というわけではない. 実際に直既約射影的加群に対応する idempotents と, それから arrows を standard bases T_w たちの線形結合で書いてしまってガリガリ計算機でほとんど $\mathbb{Z}[v]$-係数で計算してしまう. (ここは、目のこでさがす.) そこで $\Phi_e(v)$ の係数がつく部分とそうではない部分に分けることで証明される. [15]

この計算例でもよくやってしまう間違いである socle 列と Loewy 列の dualtiy から "真ん中から折り返せる" という勘違いの反例になっている[16].

Proposition 19. *Conjecture 4,Conjecture 5* は正しい.

---

[15]計算機でこのことをしっかり計算しておこうと思ったのは、後の完全に理論的に証明がついている Conjecture 36 に役立つからと思っていることもある.

[16]僕自身もはじめは間違えた. これは、大御所でも間違えたことがある話が有名: 大御所は論文にて指摘した人に感謝していたという. やはり大御所だ.

5.3.2. $e = 4$. $\mathrm{wt}_e(B) > 1$ となる $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^2}(F_4)$ のブロックイデアル B は,$\phi_{1,0} \in B$ か $\phi'_{2,4} \in B$ のもののみ. (ともに $\mathrm{wt}_e(B) = 2$.) この場合は、tame になると主張してあった. unequal parameter の場合なので a-関数で既約加群の名前をつけられるという一般論はまだないが, うまくいっているのでそれをもって既約加群の label 付けをする. $\phi_? \in \mathrm{Irr}(W(F_4))$ で label される既約加群を $\varphi_?$ で書く.

Proposition 20. 非同型直既約加群 $P(\varphi_{1,0}),P(\varphi_{9,2})\ P(\varphi'_{1,12}),P(\varphi'_{9,6})$ の *Loewy* 列は次のようになる:

$$P(\varphi_{1,0}) : \begin{bmatrix} & \varphi_{1,0} & \\ \varphi_{9,2} & & \varphi_{1,0} \\ \varphi_{1,0} & & \\ \varphi_{9,2} & & \\ & \varphi_{1,0} & \end{bmatrix}, P(\varphi_{9,2}) : \begin{bmatrix} & \varphi_{9,2} & \\ \varphi_{1,0} & & \varphi'_{9,6} \\ \varphi_{9,2} & & \\ \varphi_{1,0} & & \\ & \varphi_{9,2} & \end{bmatrix}$$

他は、*Goldman involution* を施して得られる.

Proposition 21. *Conjecture 4, Conjecture 5* は正しい.

以下 quiver と relation を与える証明の方法をみておこう. In this subsection we assume that $e = 4$, *i.e.* $q^2 + 1 = 0$. We consider the Hecke algebra $\mathcal{H}$ of type F_4 with the following parameters:

$$q \text{---} q = q^2 \text{---} q^2$$

Then, by Bremke's work [Bre94], we know the decomposition matrix of the principal block of $\mathcal{H}$ as follows:

$\phi_{1,0}$	1	.	.	.
$\phi_{9,2}$	1	1	.	.
$\phi'_{1,12}$	.	.	1	.
$\phi'_{9,6}$	.	.	1	1
$\phi_{16,5}$	.	1	.	1
$\phi''_{9,6}$	1	1	.	.
$\phi''_{1,12}$	1	.	.	.
$\phi_{9,10}$	.	.	1	1
$\phi_{1,24}$	.	.	1	.

Here, dot $\cdot$ stands for zero and the labelling of irreducible (ordinary) characters is taken from [Car85].

Now, we consider Hecke subalgebras $\mathcal{H}_{\mathbf{Q}(v),v}(C_3)$ of $\mathcal{H}_{\mathbf{Q}(v),v}(F_4)$ and $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(C_3)$ of $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(F_4)$. That is, $\mathcal{H}_{R,u}(C_3)$ is generated by all the standard bases of $\mathcal{H}_{R,u}(F_4)$ corresponding to simple roots $\{r_2, r_3, r_4\}$.

Let $\hat{f}_\lambda$ be the central primitive idempotent of $\mathcal{H}_{\mathbf{Q}(v),v}(C_3)$ corresponding to a bipartition λ of 3. Note that by using the character theory of Hecke algebras we can explicitly compute $\hat{f}_\lambda$ in terms of linear combinations of standard bases. Then,

$$f_1 := (\hat{f}_{3.} + \hat{f}_{111.})|_{v\to q}, f_2 := \hat{f}_{21.}|_{v\to q}, f_3 := \hat{f}_{.21}|_{v\to q}, f_4 := (\hat{f}_{.3} + \hat{f}_{.111})|_{v\to q}$$

are block idempotents in $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(C_3)$. Let b_0 be the principal block idempotent of $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(F_4)$. Let $\hat{b}_0$ be the unique lift of b_0. Note that we can compute $\hat{b}_0$ explicitly in terms of a unique linear combination of standard bases, and so we can compute b_0 as well.

For $i = 1, 2, 3, 4$, let $\hat{f}_i^0 := \hat{b}_0 \hat{f}_i$. Put

$$\hat{g}_a := -(T_3 + 1)(T_4 + 1), \hat{g}_b := -(T_4 + 1)(T_3 + 1).$$

Then, since $\hat{f}_\lambda$ commutes with T_3 and T_4, we know that $\hat{f}_\lambda$ commutes with $\hat{g}_a$ and $\hat{g}_b$.

Put

$$\hat{f}^0_{2,a} := \hat{g}_a \hat{f}^0_2, \hat{f}^0_{2,b} := \hat{g}_b \hat{f}^0_2, \hat{f}^0_{3,a} := \hat{g}_a \hat{f}^0_3, \hat{f}^0_{3,b} := \hat{g}_b \hat{f}^0_3.$$

and their specialized elements

$$f^0_{2,a} := \hat{f}^0_{2,a}|_{v\to q}, f^0_{2,b} := \hat{f}^0_{2,b}|_{v\to q}, f^0_{3,a} := \hat{f}^0_{3,a}|_{v\to q}, f^0_{3,b} := \hat{f}^0_{3,b}|_{v\to q}.$$

Then, we consider the following lemma:

Lemma 22. *For $i = 2, 3$,*

$$f_i^0 = f_{i,a}^0 + f_{i,b}^0, \quad f_{i,a}^0 f_{i,a}^0 = f_{i,a}^0, f_{i,b}^0 f_{i,b}^0 = f_{i,b}^0, f_{i,b}^0 f_{i,a}^0 = f_{i,a}^0 f_{i,b}^0 = 0.$$

Proof. Since $(T_i + 1)(T_i + 1) = 0$ for $i = 3, 4$, we have

(4) $$g_a g_b = g_b g_a = 0.$$

$$\begin{aligned}
g_a g_a &= (T_3 + 1)(T_4 + 1)(T_3 + 1)(T_4 + 1) \\
&= (T_3 + 1 + (T_3 + 1)T_4)(T_3 + 1 + (T_3 + 1)T_4) \\
&= (T_3 + 1)^2 + (T_3 + 1)^2 T_4 + (T_3 + 1)T_4(T_3 + 1) + (T_3 + 1)T_4(T_3 + 1)T_4 \\
&= (T_3 + 1)T_4(T_3 + 1) + (T_3 + 1)T_4(T_3 + 1)T_4 \\
&= (T_3 + 1)\{T_4(T_3 + 1) + T_4(T_3 + 1)T_4\} \\
&= (T_3 + 1)\{T_4T_3 + T_4 + T_4T_3T_4 + T_4^2\} \\
&= (T_3 + 1)\{T_4T_3 + T_4 + T_4T_3T_4 - 2T_4 - 1\} \\
&= (T_3 + 1)\{T_4T_3 + T_4T_3T_4 - T_4 - 1\} \\
&= (T_3 + 1)\{-(T_4 + 1) + T_4T_3 + T_4T_3T_4\} \\
&= g_a + T_3T_4T_3 + T_3T_4T_3T_4 + T_4T_3 + T_4T_3T_4 \\
&= g_a + T_3T_3T_4T_3 + T_4T_3 + 2T_3T_4T_3 \\
&= g_a + (T_3T_3 + 2T_3 + 1)T_4T_3 \\
&= g_a.
\end{aligned}$$

So, we have

(5) $$g_a g_a = g_a.$$

Similarly, we also have

(6) $$g_b g_b = g_b.$$

Hence, since $\hat{f}_i$ and $g_?$ commute each other, we deduce that for $i = 2, 3$

$$f_{i,a}^0 f_{i,a}^0 = f_{i,a}^0, f_{i,b}^0 f_{i,b}^0 = f_{i,b}^0, f_{i,b}^0 f_{i,a}^0 = f_{i,a}^0 f_{i,b}^0 = 0.$$

Now, we look at the sum $g_a + g_b$:

$$\begin{aligned}
g_a + g_b &= -(T_3 + 1)(T_4 + 1) - (T_4 + 1)(T_3 + 1) \\
&= -T_3T_4 - T_3 - T_4 - 1 - T_4T_3 - T_3 - T_4 - 1 \\
&= -T_3T_4 - T_4T_3 - 2T_3 - 2T_4 - 2
\end{aligned}$$

On the other hand we look at a central primitive idempotent of the subalgebra $\langle T_3, T_4 \rangle_{\mathbf{Q}(v)}$ of $\mathcal{H}_{\mathbf{Q}(v),v}(F_4)$, which is isomorphic to $\mathcal{H}_{\mathbf{Q}(v),v}(A_2)$. Let $\hat{h}_\lambda$ be the central primitive idempotent of $\langle T_3, T_4 \rangle_{\mathbf{Q}(v)}$ corresponding to a partition λ of 3. Then, $\hat{h}_{21}$ is the following form:

$$\hat{h}_{21} = \frac{1}{v^2 + 1 + v^{-2}} \{2 + (1 - v^{-2})T_3 + (1 - v^{-2})T_4 - v^{-2}T_3T_4 - v^{-2}T_4T_3\}$$

Clearly,

$$\hat{h}_{21}|_{v \to q} = g_a + g_b.$$

Since the brunching rule between the Weyl group of type A_2 and the Weyl group of type B_3 is given as TABLE 1, we know that

(7) $$\begin{aligned}
&\hat{f}_{21.} = \hat{f}_{21.}(\hat{h}_3 + \hat{h}_{111} + \hat{h}_{21}) = \hat{f}_{21.}\hat{h}_{21}(\hat{h}_3 + \hat{h}_{111} + \hat{h}_{21})\hat{f}_{21.} = \hat{h}_{21}\hat{f}_{21.}, \\
&\hat{f}_{.21} = \hat{f}_{.21}\hat{h}_{21} = \hat{h}_{21}\hat{f}_{.21}.
\end{aligned}$$

Therefore, we are done.

	111	21	3
111.	1	.	.
11.1	1	1	.
1.11	1	1	.
.111	1	.	.
21.	.	1	.
1.2	.	1	1
2.1	.	1	1
.21	.	1	.
3.	.	.	1
.3	.	.	1

TABLE 1

□

Put $e_i := b_0 f_i$ for $i = 1, 4$ and $e_j := f^0_{j,a}$ for $j = 2, 3$.

Theorem 23.

$$P(\phi_{1,0}) \cong \mathcal{H}e_1, P(\phi_{9,2}) \cong \mathcal{H}e_2, P(\phi'_{9,6}) \cong \mathcal{H}e_3, P(\phi'_{1,12}) \cong \mathcal{H}e_4.$$

Let Λ be $(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)\mathcal{H}(e_1 + e_2 + e_3 + e_4)$. Put

$$\begin{aligned}
&\alpha^+ := e_2T_1T_2T_3T_4T_3T_2T_1e_1, \alpha^- := e_1T_1T_2T_3T_4T_3T_2T_1e_2,\\
&a := e_1(T_3+1)e_1, \beta^+ := e_3T_1e_2, \beta^- := e_2T_1e_3,\\
&\gamma^+ := e_4T_1T_2T_3T_4T_3T_2T_1e_3, \gamma^- := e_3T_1T_2T_3T_4T_3T_2T_1e_4,\\
&b := e_4(T_3+1)e_4
\end{aligned}$$

Theorem 24.

$$\begin{aligned}
&a^2 = 0,\\
&a\alpha^-\alpha^+ - \alpha^-\alpha^+a = 0,\\
&\alpha^+\alpha^-\alpha^+ - 8\alpha^+a = 0,\\
&\beta^+\alpha^+ = 0,\\[1em]
&\alpha^-\alpha^+\alpha^- - 8a\alpha^- = 0,\\
&32\beta^-\beta^+ + q\alpha^+\alpha^-\alpha^+\alpha^- = 0,\\
&\gamma^+\beta^+ = 0,\\[1em]
&\alpha^-\beta^- = 0,\\
&32\beta^+\beta^- + q\gamma^-\gamma^+\gamma^-\gamma^+ = 0,\\
&\gamma^+\gamma^-\gamma^+ - 8b\gamma^+ = 0,\\[1em]
&\beta^-\gamma^- = 0,\\
&b\gamma^+\gamma^- - \gamma^+\gamma^-b = 0,\\
&\gamma^-\gamma^+\gamma^- - 8\gamma^-b = 0,\\
&b^2 = 0.
\end{aligned}$$

For any $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \in \{\alpha^+, \alpha^-, \beta^+, \beta^-, \gamma^+, \gamma^-, a, b\}$,

$$x_1x_2x_3x_4x_5 = 0.$$

Lemma 25. $\dim_k \mathrm{End}_{\mathcal{H}}(P(\phi_{1,0}) \oplus P(\phi_{9,2}) \oplus P(\phi'_{9,6}) \oplus P(\phi'_{1,12})) = 36 = \dim_k(\Lambda)$.

Proof. This is clear by the Cartan matrix of the principal block of $\mathcal{H}$. □

Let $\mathcal{Q}$ be the quiver given as follows:

$$
\begin{tikzcd}
e_1 \arrow[loop left, "a"] \arrow[r, shift left, "\alpha^+"] & e_2 \arrow[l, shift left, "\alpha^-"] \arrow[r, shift left, "\beta^+"] & e_3 \arrow[l, shift left, "\beta^-"] \arrow[r, shift left, "\gamma^+"] & e_4 \arrow[l, shift left, "\gamma^-"] \arrow[loop right, "b"]
\end{tikzcd}
$$

Theorem 26. *Let $\mathbf{k}[\mathcal{Q}]$ be the path algebra corresponding to $\mathcal{Q}$. Let $\mathcal{I}$ be the two-side ideal of $\mathbf{k}[\mathcal{Q}]$ generated by*

$$
\begin{aligned}
&a^2,\\
&a\alpha^-\alpha^+ - \alpha^-\alpha^+a,\\
&\alpha^+\alpha^-\alpha^+ - 8\alpha^+a,\\
&\beta^+\alpha^+,\\
\\
&\alpha^-\alpha^+\alpha^- - 8a\alpha^-,\\
&32\beta^-\beta^+ + q\alpha^+\alpha^-\alpha^+\alpha^-,\\
&\gamma^+\beta^+,\\
\\
&\alpha^-\beta^-,\\
&32\beta^+\beta^- + q\gamma^-\gamma^+\gamma^-\gamma^+,\\
&\gamma^+\gamma^-\gamma^+ - 8b\gamma^+,\\
\\
&\beta^-\gamma^-,\\
&b\gamma^+\gamma^- - \gamma^+\gamma^-b,\\
&\gamma^-\gamma^+\gamma^- - 8\gamma^-b,\\
&b^2.
\end{aligned}
$$

Then, Λ is isomorphic to $\mathbf{k}[\mathcal{Q}]/\mathcal{I}$ i.e. *the principal block of $\mathcal{H}$ is Morita equivalent to $\mathbf{k}[\mathcal{Q}]/\mathcal{I}$. In particular, the principal block of $\mathcal{H}$ is a special biserial algebra.*

Proof. First, we calculate the dimension of $\mathbf{k}[\mathcal{Q}]/\mathcal{I}$. The pathes starting from e_1 are given as follows: Since $\beta^+\alpha^+ = 0$ and $a^2 = 0$, the pathes starting from e_1 whose length is less than or equal to 2 are as follows:

$$e_1, a, \alpha^+, \alpha^+a, \alpha^-\alpha^+.$$

Then, since $\alpha^-\alpha^+a = a\alpha^-\alpha^+$, we find all the length 3 pathes starting from e_1 as

$$\alpha^+\alpha^-\alpha^+, a\alpha^-\alpha^+.$$

Since $\alpha^-\alpha^+\alpha^-\alpha^+ = 8a\alpha^-\alpha^+$, we exclude $\alpha^-\alpha^+\alpha^-\alpha^+$ from the length 4 pathes starting from e_1. So, the possible length 4 pathes starting from e_1 are only $\alpha^+a\alpha^-\alpha^+$. However,

$$
\begin{aligned}
&8q\alpha^+a\alpha^-\alpha^+\\
&= q\alpha^+\alpha^-\alpha^+\alpha^-\alpha^+\\
&= -32\beta^-\beta^+\alpha^+\\
&= 0
\end{aligned}
$$

Hence, there is no length 4 path starting from e_1. So, we conclude that the pathes starting from e_1 are the following $4+2$ pathes:

$$e_1, a, \alpha^-\alpha^+, a\alpha^-\alpha^+,$$

and

$$\alpha^+, \alpha^+\alpha^-\alpha^+.$$

In other word, the space

$$\mathbf{k}e_1 \oplus \mathbf{k}a \oplus \mathbf{k}\alpha^-\alpha^+ \oplus \mathbf{k}a\alpha^-\alpha^+ \oplus \mathbf{k}\alpha^+ \oplus \mathbf{k}\alpha^+\alpha^-\alpha^+$$

is isomorphic to the projective indecomposable $\mathbf{k}[\mathcal{Q}]/\mathcal{I}$-module corresponding to e_1.

Similarly, we can deduce that the pathes starting from e_4 are

$$e_4, b, \gamma^-\gamma^+, b\gamma^-\gamma^+, \gamma^-, \gamma^-\gamma^+\gamma^-.$$

Next, we consider the pathes starting from e_2. The pathes starting from e_2 whose length is less than or equal to 2 are the following 6 pathes:

$$e_2, \beta^+, \alpha^-, \alpha^+\alpha^-, \beta^-\beta^+, a\alpha^-.$$

We shall show that these are the bases for $(\mathbf{k}[Q]/\mathcal{I})e_2$.

(i) First, we consider a path $x\beta^-\beta^+$ for some arrow x. Since $\beta^-\beta^+ = e_2\beta^-\beta^+e_2$, we consider the possible arrows x with $xe_2 \neq 0$ which are β^+ and α^-. Since $\alpha^-\beta^- = 0$, we only consider $\beta^+\beta^-\beta^+$. However, since $32\beta^-\beta^+ = -q\alpha^+\alpha^-\alpha^+\alpha^-$ and $\beta^+\alpha^+ = 0$, $32\beta^+\beta^-\beta^+ = -q(\beta^+\alpha^+)\alpha^-\alpha^+\alpha^- = 0$. So, there is no arrow x such that $x\beta^-\beta^+ \neq 0$.

(ii) Next, we consider a path $xa\alpha^-$ for some arrow x. Since $a^2 = 0$, all we have to consider is $\alpha^+a\alpha^-$. However, since

$$8q\alpha^+a\alpha^- = q\alpha^+\alpha^-\alpha^+\alpha^- = -32\beta^-\beta^+,$$

we have already counted this element.

(iii) Finally, we consider a path $x\alpha^+\alpha^-$ for some arrow x. Since $e_2\alpha^+\alpha^-e_2 = \alpha^+\alpha^-$, we only consider the possible arrow x with $xe_2 \neq 0$ which are β^+ and α^-. Since $\beta^+\alpha^+ = 0$, we only consider $\alpha^-\alpha^+\alpha^-$. However, we have already counted this element since $\alpha^-\alpha^+\alpha^- = 8a\alpha^-$.

□

5.3.3. $e = 6$. この場合は、$\mathrm{wt}_e(B) > 1$ とすると主ブロックのみが残る. wild 型であることは、確認できるが Loewy 列や quiver と relations は計算できていない.

5.4. $r = 4$.

5.4.1. $e = 4$. 5.3.1 と同様にして D_4 の場合が分かればよい. $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(D_4)$ の $\mathrm{wt}_e(B) > 1$ となるブロック B は主ブロックのみで、非同型既約 B-加群の個数は 5 つでありラベルは (.4), (.31), (2.+), (2.−), (1.21) である.

Proposition 27. 直既約射影的加群 $P(.4)$, $P(.31)$,$P(2.+)$,$P(2.-)$,$P(1.21)$ の *Loewy* 列は次のようになる.

$$P(.4) : \begin{bmatrix} (.4) \\ (.31)(2.+)(2.-) \\ (.4)(.4)(.4)(1.21) \\ (.31)(2.+)(2.-) \\ (.4) \end{bmatrix}, P(.31) : \begin{bmatrix} (.31) \\ (.4)(1.21) \\ (.31)(2.+)(2.-) \\ (.4)(1.21) \\ (.31) \end{bmatrix}$$

他は,*Goldman involution* とグラフ自己同型によって得られる. グラフ自己同型は (.31), (2.+), (2.−) を入れ替える.

この場合も $r = 2, e = 4$ の場合と同じように quiver と relation が計算できる.

5.4.2. $e = 8$. $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ の $\mathrm{wt}_e(B) > 1$ となるブロック B は $\phi'_{2,4} \in B$ となるもののみで、非同型既約 B-加群の個数は 2 つでありラベルを a-関数を用いて与えることにすると $\varphi'_{2,4}, \varphi'_{8,3}$ である.

Proposition 28. $\phi'_{2,4} \in B$ となる $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ のブロックを考える. 直既約射影的 B-加群の *Loewy* 列は次のようになる:

$$P(\varphi'_{2,4}) : \begin{bmatrix} & \varphi'_{2,4} & \\ \varphi'_{8,3} & & \varphi'_{2,4} \\ \varphi'_{2,4} & & \\ \varphi'_{8,3} & & \\ & \varphi'_{2,4} & \end{bmatrix}, P(\varphi'_{8,3}) : \begin{bmatrix} & \varphi'_{8,3} & \\ \varphi'_{2,4} & & \varphi'_{8,3} \\ \varphi'_{8,3} & & \\ \varphi'_{2,4} & & \\ & \varphi'_{8,3} & \end{bmatrix}.$$

Proposition 29. *Conjecture 4, Conjecture 5* は正しい.

この場合も $r = 2, e = 4$ の場合と同じように quiver と relation が計算できる.

5.4.3. $e=10$. $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ の $\mathrm{wt}_e(B)>1$ となるブロック B は主ブロックのみで非同型既約 B-加群の個数は 5 つでありラベルを a-関数を用いて与えることにすると $\varphi'_{1,0}$,$\varphi_{4,1}$, $\varphi_{9,2}$,$\varphi'_{6,6}$,$\varphi_{12,4}$ である.

Proposition 30. B を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ の主ブロックとする. 直既約射影的 B-加群の *Loewy* 列は次のようになる:

$$P(\varphi_{1,0}):\begin{bmatrix}\varphi_{1,0}\\ \varphi_{9,2}\\ \varphi_{1,0}\varphi_{4,1}\varphi'_{6,6}\\ \varphi_{9,2}\\ \varphi_{1,0}\end{bmatrix},P(\varphi_{4,1}):\begin{bmatrix}\varphi_{4,1}\\ \varphi_{9,2}\\ \varphi_{1,0}\varphi_{4,1}\varphi_{12,4}\\ \varphi_{9,2}\\ \varphi_{4,1}\end{bmatrix},P(\varphi_{9,2}):\begin{bmatrix}\varphi_{9,2}\\ \varphi_{1,0}\varphi_{4,1}\varphi_{12,4}\varphi'_{6,6}\\ \varphi_{9,2}\varphi_{9,2}\varphi_{9,2}\\ \varphi_{1,0}\varphi_{4,1}\varphi_{12,4}\varphi'_{6,6}\\ \varphi_{9,2}\end{bmatrix}.$$

他は, *Goldman involution* により得る.

Proposition 31. *Conjecture 4, Conjecture 5* は正しい.

5.4.4. $e=12$. $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^4}(F_4)$ の $\mathrm{wt}_e(B)>1$ となるブロック B は主ブロックのみで非同型既約 B-加群の個数は 5 つでありラベルを a-関数を用いて与えることにすると $\varphi'_{1,0}$,$\varphi'_{1,12}$, $\varphi'_{8,3}$,$\varphi''_{2,4}$,$\varphi'_{9,6}$, $\varphi_{16,5}$ である.

Proposition 32. B を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ の主ブロックとする. 直既約射影的 B-加群の *Loewy* 列は次のようになる:

$$P(\varphi_{1,0}):\begin{bmatrix}\varphi_{1,0}\\ \varphi'_{8,3}\varphi''_{2,4}\varphi_{16,5}\\ \varphi_{1,0}\varphi_{1,0}\varphi_{1,0}\varphi'_{9,6}\\ \varphi'_{8,3}\varphi''_{2,4}\varphi_{16,5}\\ \varphi_{1,0}\end{bmatrix},P(\varphi'_{1,12}):\begin{bmatrix}\varphi'_{1,12}\\ \varphi'_{9,6}\\ \varphi'_{1,12}\varphi'_{8,3}\\ \varphi'_{9,6}\\ \varphi'_{1,12}\end{bmatrix},P(\varphi'_{8,3}):\begin{bmatrix}\varphi'_{8,3}\\ \varphi_{1,0}\varphi'_{9,6}\\ \varphi'_{8,3}\varphi'_{1,12}\varphi_{16,5}\\ \varphi_{1,0}\varphi'_{9,6}\\ \varphi'_{8,3}\end{bmatrix}.$$

他は, *Goldman involution* を施して得られる.

Proposition 33. *Conjecture 4, Conjecture 5* は正しい.

この場合も $r=2, e=4$ の場合と同じように quiver と relation が計算できる.

5.5. まとめ. $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4), r\in\{1,2,4\}$ について、ここまで何がどこまで分かっているのかを open problem として記す.

5.5.1. *Loewy* 列. 4.1 の仮定の下で直既約射影的加群の Loewy 列が分かっていない場合は、

(i) $e=2, \mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)$ の主ブロック,
(ii) $e=6, \mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^2}(F_4)\cong\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^4}(F_4)$ の主ブロック.

5.5.2. *Quiver* と *relations*. 4.1 の仮定の下で quiver と relation による表示が分かっていない場合は、

(i) $e=2,4,6, \mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)$ の主ブロック,
(ii) $e=6, \mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^2}(F_4)\cong\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^4}(F_4)$ の主ブロック,
(iii) $e=10, \mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^4}(F_4)$ の主ブロック.

5.5.3. *Broué's abelian defect conjecture* の q-類似? $\ell=3$ として Weyl 群 $W(F_4)$ の標数 3 に関する Broué's abelian defect conjecture[Bro92] を考えることができる. 面白いことに Theorem 11,Theorem 12 では、その q-類似が成り立っている. (ただし森田同値として実現されている.)

このことは、A 型では [Tur02] もしくは [Miy01c] (ただし Hecke 環の parameter q は素体か $\mathbf{C}$ に入るときのみ) と最近各地で講演している Rickard,Chuang-Rouquier の derived equivalence を使うとすべてのブロックイデアルでその q-類似が成り立つことが確認できる. (係数体の標数 ℓ は e-weight より大きいか 0.)

実は、他にもある. $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ を扱ってきたが、次が分かっている. [宮地兵衛, Some degenerate unipotent blocks, 2003 年度の有限群のコホモロジー論, 佐々木 ed.],[Miy03a].

Theorem 34. q は奇素数のべきとする. $E_6(q)$ を 有限 *Chevalley* 群とする. $\mathbf{k}$ を標数 $\ell>0$ の十分大きな体で $q\cdot 1_{\mathbb{F}_\ell}$ の位数が 4 となると仮定する. $D_4(q)$ を *simple roots* を E_6 のそれからとってきた $E_6(q)$ の D_4 型の *Levi* 部分群とする A を $\mathbf{k}[E_6(q)]$ の主ブロックイデアルとして、B を正規化群 $N_{E_6(q)}(D_4(q))\cong D_4(q).\mathfrak{S}_3$ 主ブロックイデアルとする. (*Sylow* Φ_4*-torus*[BM92] が共通な状況) このとき, A と B は森田同値となる.

そして、上記定理の系として Hecke 環版の次が成り立つ:

Theorem 35. q を $\mathbb{C}^\times$ か $\mathbb{F}_\ell^\times$ の原始 4 乗根根とする. A を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(E_6)$ の主ブロックイデアルとして、B を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^4}(F_4)$ の主ブロックイデアルとする. このとき, A と B は森田同値となる. [17]

なので Proposition 27 で頑張って計算したことを種にして高々192 次元の代数の構造から Clifford theory, 上記定理を介して 51840 次元の代数の構造を,up to 森田同値で,復元できたわけである (Local representation theory).

上記定理を見れば、つぎの予想も自然だろう:

Conjecture 36. $q=-1$ とする. A を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(E_6)$ の主ブロックイデアルとして、B を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^2}(F_4)$ の主ブロックイデアルとする. このとき, A と B は導来同値となる.

説得力に欠けるといけないので、おのおのの分解行列を書いておこう.

A:

a	name						
0	$\phi_{1,0}$	1	.	.	.	.	.
1	$\phi_{6,1}$	.	1	.	.	.	.
2	$\phi_{20,2}$	.	1	1	.	.	.
3	$\phi_{15,5}$	1	.	1	.	.	.
3	$\phi_{30,3}$	.	1	1	1	.	.
3	$\phi_{15,4}$	1	.	.	.	1	.
5	$\phi_{60,5}$	.	.	1	.	.	1
6	$\phi_{24,6}$	.	.	1	1	.	.
6	$\phi_{81,6}$	1	1	1	.	1	1
7	$\phi_{20,10}$	.	1	.	.	1	.
7	$\phi_{90,8}$	.	1	2	1	.	1
7	$\phi_{60,8}$	.	.	.	.	1	1
7	$\phi_{10,9}$	.	.	.	1	.	.
10	$\phi_{81,10}$	1	1	1	.	1	1
11	$\phi_{60,11}$	.	.	1	.	.	1
12	$\phi_{24,12}$	.	.	1	1	.	.
15	$\phi_{15,17}$	1	.	1	.	.	.
15	$\phi_{30,15}$	.	1	1	1	.	.
15	$\phi_{15,16}$	1	.	.	.	1	.
20	$\phi_{20,20}$	.	1	1	.	.	.
25	$\phi_{6,25}$	.	1	.	.	.	.
36	$\phi_{1,36}$	1	.	.	.	.	.

B:

name						
$\phi_{1,0}$	1	.	.	.	.	.
$\phi'_{2,4}$	.	1	.	.	.	.
$\phi'_{1,12}$	1	.	.	.	.	.
$\phi_{4,1}$	.	1	1	.	.	.
$\phi_{9,2}$	1	1	1	1	.	.
$\phi'_{4,7}$	.	1	1	.	.	.
$\phi''_{2,4}$	.	.	1	.	.	.
$\phi'_{9,6}$	1	1	1	1	.	.
$\phi''_{8,3}$	1	.	1	1	1	.
$\phi_{4,8}$	.	.	.	1	.	.
$\phi'_{6,6}$	1	.	.	1	1	.
$\phi''_{6,6}$	1	.	.	1	1	.
$\phi_{12,4}$	.	1	2	1	.	1
$\phi'_{8,9}$	1	.	1	1	1	.
$\phi'_{2,16}$	.	.	1	.	.	.
$\phi''_{9,6}$	.	.	1	1	1	1
$\phi''_{4,7}$	.	.	1	.	.	1
$\phi_{9,10}$	.	.	1	1	1	1
$\phi_{4,13}$	.	.	1	.	.	1
$\phi''_{1,12}$	.	.	.	.	1	.
$\phi''_{2,16}$	.	.	.	.	.	1
$\phi_{1,24}$	.	.	.	.	1	.

行の入れ替えと列の入れ替えをすれば、これらの分解行列は非常に似通っていることが分かる. ちなみにこれらの入れ替えでは、同じ行列にはなりえないので森田同値には絶対にならない.

5.6. 同型? $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^r}(F_4)$ の構造についてここまでよく読んでいただいた方は、$e=4, r=1$ の場合のときの主ブロックと $e=10, r=4$ の場合のときの主ブロックの類似性に気がついたことであろう. ラベルおよび Goldman involution も込みで同じ形をしている. (実は, 双方のもとの Hecke 環には weight 1 のブロックがあるが、ここではラベルが異なるが同型になることがわかる.) なので、つぎの質問は自然だろう:

Question 37. $\mathbf{k}$ に属する原始 4-乗根 q' と原始 10-乗根 q をとってくる. このとき $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q',q'}(F_4) \cong \mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q^4}(F_4)$?

[17] 森田同値を与える両側 (A,B)-加群を M とすると, $\mathrm{End}_A(M) \cong B$ となっているわけなので, $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,1}(F_4) \subset \mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(E_6)$ がありそうな雰囲気. 少なくとも b を $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,1}(F_4)$ の主ブロックべき等元とすれば、$b\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,1}(F_4) \subset \mathcal{H}_{\mathbf{k},q}(E_6)$ は正しい. ある $i \geq 0$ と良い $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v),v,v^i}(F_4) \subset \mathcal{H}_{\mathbb{Q}(v),v}(E_6)$ なる埋め込みを見つけることができれば, Chevalley 群 free な証明で Theorem 35 の拡張ができるだろう. こんな埋め込みや folding の話が open problem であることは、庄司先生に 5,6 年前に電車の中で話に聞いた. それから, しばし時が流れて (parameter のとり方に制限がすこしあるものもの) 先生は B 型の場合に放物的部分群ではない鏡映部分群に対応する Hecke 部分代数を定義することに成功した. 標語としては B 型 Hecke 環のなかに $B \times B$ 型 Hecke 環を作ってしまう. こういった今までにない部分代数をつくると違った functor やら加群を提供して新しい可能性を与えてくれる.

No でも Yes でもよいのである．どちらかを判定できないということは，岩堀-Hecke 環に登場するブロックイデアルを森田同値で分類できないことになる．ちなみに面白いこととして左辺にはグラフ自己同型があるが右辺のグラフ自己同型はよく分からないのである．それから同じ問題として、このブロックの直既約射影的加群の Loewy 列パターンは、他でも登場している．非結晶型の H_4 型 Hecke 環にでる Φ_3-ブロックイデアル 2 つと Φ_5-ブロックイデアル 2 つだ．ちなみにどの場合も a-値による行列のソートにより同じ形になっている [Mül97].

6. F_4 型 Chevalley 群

例外型有限 Chevalley 群すべての場合を含む ℓ-modular 表現論の主要な参考文献は、[Sch85], [BMM93] である．q は 2,3 以外の素数 p のべきとする．さてここで F_4 型有限 Chevalley 群 $F_4(q)$ に戻ってくる．$\mathbf{k}$ を標数 $\ell > 0$ の体 $\ell \nmid q$ なるものとし、e を $q \cdot 1_{\mathbf{F}_\ell}$ の位数とする．Wings により川中氏の modified generalized Gelfand-Graev character [Kaw85],[Kaw86] のべき単指標の重複度が計算されている．これにより $\mathbf{k}[F_4(q)]$ のべき単ブロックの既約表現の identification problem が解かれている．とくに，Geck-Hiss の予想 [GH97] が解ける．この既約表現のラベル付けは Hecke 環側の a-関数によるソートと仲良しになっている．まずこのことに注意する．$D(\phi)$ でべき単指標 ϕ でラベルされた既約 $\mathbf{k}[F_4(q)]$-加群を表す．次に，$e > 1$ なる条件のもとでは $M := \mathbf{k}_{B(q)} \uparrow^{F_4(q)}$ (ただし $B(q)$ は $F_4(q)$ の Borel 群) は射影的加群であるので、前節の直既約射影的加群の Loewy 列の系として，つぎが分かる:

Theorem 38. $e > 1$ を仮定する．おのおの $\phi, \phi' \in \mathrm{Irr}W(F_4)$ が a-関数による分類で $\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)$ の既約表現 φ, φ' に対応すると仮定する．

(i) $\dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Ext}^1_{\mathbf{k}[F_4(q)]}(D(\phi), D(\phi')) \le \dim_{\mathbf{k}} \mathrm{Ext}^1_{\mathcal{H}_{\mathbf{k},q,q}(F_4)}(\varphi, \varphi')$ (右辺は、この報告で分かった) .

(ii) $e > 2$ ならば $\mathrm{Ext}^1_{\mathbf{k}[F_4(q)]}(D(\phi), D(\phi)) = \{0\}$.

(iii) $P(\phi)$ を $D(\phi)$ の射影被覆して、B を ϕ が属する $\mathbf{k}[F_4(q)]$ のブロックイデアルとする．すると，$P(\phi)$ の *Loewy* 列の長さは $2\,\mathrm{wt}_e(B) + 1$ 以上となる．

同様のことが，Steinberg 群 $G^F = {}^2E_6(q)$ でいえる．Borel 部分群の位数を割らない素数 ℓ に関して言える．

7. F_4 型 Hecke 環に関する情報

7.1. **文献.**

(i) ここで今回扱っていない場合 F_4 の岩堀-Hecke 環の modular 表現の話は [Gyo96] [MP99],[MP00] などがある．

(ii) 左セルに関する情報は,[Tak90] がある．unequal parameter のことは，[Lus03],[Gec02].

(iii) generic Hecke 環 $\mathcal{H}_{\mathbf{Q}(u,v),u,v}(F_4)$ の既約表現行列は [Gec94],[RT99] がある．ただし [RT99] は denominator を含んでいるので modular 表現には使えない．[Gec94] は W-graph の構造 [GP00] をもっている．

7.2. **Lusztig's isomorphism.** [Lus81] にある Lusztig の同型の F_4 の場合の explicit な像が分かったので興味のある方は、ご一報ください．F_4 の Hecke 環の定義を除くとわずか 3 頁ですが...

8. E_6, E_7, E_8

8.1. E_6. E_6 の岩堀-Hecke 環の既約表現に対する W-graph を岡山の成瀬氏 [Nar03] が、計算されました．J. Michel の web page にある CHEVALLEY-LIE beta 版に，その data が入っています．manual には書いてありません．余談だが，beta 版には 庄司の定理による Lusztig (twisted) induction や manual に書いていない情報がいっぱい入っています．ソースをよく読まれたし．

8.2. E_7. E_7 の岩堀-Hecke 環の既約表現に対する W-graph を千葉の吉田憲秀氏とともに計算しました．興味のあるかたは、ご一報ください．Theorem 35, Conjecture 36 は実は E_7 型にも関係がある．導来同値を構成して E_7 型に現れるブロックの記述をするためにも使えるのである．

8.3. E_8. Theorem 35, Conjecture 36 は実は E_8 型にも関係がある. このあたりは仏国にいるときにあらかた見回した. (*i.e.* Rouquier block を A 型以外の古典型や例外型に探すこと. なぜなら Puig[Pui90] の定理は, A 型の場合に Rouquier block の特殊例になっているからである. 実際, Chuang-Kessar[CK02] の定理の証明は、Puig のに非常に類似している. LLT-有木 picture の affine 量子群サイドで Takemura-Uglov の higher level Fock 空間へ行きたかったわけである. *i.e.* 前回の [でかいが流れの緩やかなところへ行って, そこから Fock という川を上って (下って) こよう] と思ったわけである. bipartition のサイズが 16 までは頑張ったが, A 型のときのような満足いく series はみつからなかった. A. Mathas も同じことを考えていたようです. お互い苦笑いしました. 加群の圏のほうの状況で, Brauer tree の wreath 積と圏同値になるものがいつでもあるわけではないようである. やはり, Hecke 環のほうで separation condition を満たさない場合は、明らかに A 型と B 型で違いがでてくる. ここを何とか実り豊かにできないものだろうか... D 型つまり B-型 Hecke 環を使って Clifford theory を使う場合は D 型の Chevalley 群のブロック間もしくは D 型の Hecke のブロック間で intertial group が index 2 だけ違う場合, degenate unipotent block と non-degenerate unipotent block の場合は実際森田同値をいくつか作った. しかし組み合わせ論的にどういったblock かを特徴付けることができていない.) 導来同値を構成して E_8 型に現れるブロックの記述をするためにも使えるのである. 実際、$e = 4, 6$ のときに E_6 の主ブロックと森田同値となるブロックが E_8 にはある. Scopes 型の森田同値が構成できる [Miy03b].

また、有限 Weyl 群の generic 岩堀-Hecke 環の既約表現行列が与えられていないのは, あとは E_8 だけになりました. W-graph 込みのものができていないのは, B,D と E_8. 存在は保証されている [Gyo86].

お詫び: 最後に、講究録原稿提出の締め切りをとっくに過ぎてしまいorganizerの山根さんに深くお詫びいたします.

名古屋大学多元数理科学研究科　宮地兵衛: miyachi@math.nagoya-u.ac.jp

References

[AK89] H. H. Andersen and M. Kaneda. Loewy series of modules for the first Frobenius kernel in a reductive algebraic group. *Proc. London Math. Soc.*, 59(1):74–98, 1989.

[Aria] Susumu Ariki. Hecke algebras of classical type and their representation type.

[Arib] Susumu Ariki. Uno's conjecture on representation types of Hecke algebras.

[ARS95] M. Auslander, I. Reiten, and S. O. Smalø. *Representation Theory of Artin Algebras*, volume 36 of *Cambridge studies in advanced mathematics*. Cambridge University Press, 1995.

[BGK97] F. Bleher, M. Geck, and W. Kimmerle. Automorphisms of integral group rings of finite Coxeter groups and Iwahori-Hecke algebras. *J. Algebra*, 197:615–655, 1997.

[BM92] Michel Broué and Gunter Malle. Théorèmes de Sylow génériques pour les groupes réductifs sur les corps finis. *Math. Ann.*, 292:241–262, 1992.

[BMM93] Michel Broué, Gunter Malle, and Jean Michel. Generic blocks of finite reductive groups. *Astérisque*, *212:7–92, 1993.

[Bre94] K. Bremke. The decomposition numbers of Hecke algebras of type F_4 with unequal parameters. *Manuscripta Math.*, 83(3-4):331–346, 1994.

[Bro92] M. Broué. Equivalences of blocks of group algebras. In V.Dlab and L.L.Scott, editors, *In Proceedings of the International Conference on Representations of Algebras*, Finite Dimensional Algebra and Related Topics, pages 1–26, Ottawa, Aug 1992. Kluwer Academic Publishers.

[Car85] R. W. Carter. *Finite Groups of Lie Type: Conjugacy Classes and Complex Characters*. John Wiley, New York, 1985.

[Chu99] J. Chuang. The derived categories of some blocks of symmetric groups and a conjecture of Broué. *J. Algebra*, 217:114–155, 1999.

[CK02] J. Chuang and R. Kessar. Symmetric groups, wreath products, Morita equivalences, and Broué's abelian defect group conjecture. *Bull. London Math. Soc.*, 34:174–184, 2002.

[CT02] J. Chuang and K.M. Tan. Some canonical basis vectors in the basic $U_q(\widehat{\mathfrak{sl}}_n)$-modules. *J. Algebra*, 248(2):765–779, 2002.

[DJ89] R. Dipper and G. D. James. The q-Schur algebra. *Proc. London Math. Soc.*, 59(3):23–50, 1989.

[DJ92] R. Dipper and G. D. James. Representations of Hecke algebras of type B_n. *J. Algebra*, 146:454–481, 1992.

[EN02] K. Erdmann and D. Nakano. Representation type of Hecke algebras of type A. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 354:275–285, 2002.

[Erd90] K. Erdmann. *Blocks of Tame Representation Type and Related Algebras*, volume 1428 of *Lecture Note in Mathematics*. Springer-Verlag, 1990.

[Gec94] Meinolf Geck. On the character values of Iwahori-Hecke algebras of exceptional type. *Proc. London Math. Soc.*, 68:51–76, 1994.

[Gec98] Meinolf Geck. Kazhdan-Lusztig cells and decomposition numbers. *Represent. theory*, 2:264–277, 1998.

[Gec02] Meinolf Geck. Constructible characters, leading coefficients and left cells for finite Coxeter groups with unequal parameters. *Represent. Theory*, 6:1–30, 2002.

[GH97] M. Geck and G. Hiss. Modular representations of finite groups of Lie type in non-defining characteristic. In M. Cabanes, editor, *Finite reductive groups: Related structures and representations*, volume 141 of *Progress in Mathematics*, pages 195–249. Birkhäuser,Basel, 1997.

[GHL+96] M. Geck, G. Hiss, F. Lübeck, G. Malle, and G. Pfeiffer. CHEVIE – A system for computing and processing generic character tables for finite groups of Lie type, Weyl groups and Hecke algebras. *AAECC*, 7:175–210, 1996.

[GL91] Meinolf Geck and Klaus Lux. The decomposition numbers of the Hecke algebra of type F_4. *Manuscripta Math.*, 70:285–306, 1991.

[GP92] Meinolf Geck and Götz Pfeiffer. Unipotent characters of the Chevalley groups $D_4(q)$, q odd. *Manuscripta Math.*, 76:281–304, 1992.

[GP00] Meinolf Geck and Götz Pfeiffer. *Characters of Finite Coxeter Groups and Iwahori-Hecke Algebras*, volume 21 of *London Math. Soc. Monographs New Series*. Oxford University Press, New York, 2000. xvi+446 pp.,ISBN: 0-19-850250-8.

[GR97] Meinolf Geck and Raphaël Rouquier. Centers and simple modules for Iwahori-Hecke algebras. In Marc Cabanes, editor, *Finite Reductive Groups: Related Structure and Representations*, volume 141, pages 251–272, Boston, 1997. Birkhäuser.

[GR01] Meinolf Geck and Raphaël Rouquier. Filtrations on projective modules for Iwahori-Hecke algebras. In M. J. Collins, B. J. Parshall, and L. L. Scott, editors, *Modular Representation Theory of Finite Groups*, pages 211–221. Walter de Gruyter, Berlin, 2001.

[GU89] A. Gyoja and K. Uno. On the semisimplicity of Hecke algebras. *J. Math. Soc. of Japan*, 41(1):75–79, 1989.

[Gyo86] A. Gyoja. On the existence of W-graph for an irreducible representation of a Coxeter group. *J. Algebra*, 86:422–438, 1986.

[Gyo96] A. Gyoja. Cells and modular representations of Hecke algebras. *Osaka J. Math.*, 33:307–341, 1996.

[HL80] R. B. Howlett and G. I. Lehrer. Induced cuspidal representations and generalized Hecke rings. *Invent. Math.*, 58:37–64, 1980.

[HL94] R. B. Howlett and G. I. Lehrer. On Harish-Chandra induction for modules of Levi subgroups. *J. Algebra*, 165:172–183, 1994.

[HM00] Akihiko Hida and Hyohe Miyachi. Module correspondences in some blocks of finite general linear groups. *preprint*, 2000.

[Kaw85] N. Kawanaka. *Generalized Gelfand-Graev Representations and Ennola Duality*, volume 6 of *Adv. Stud. Pure Math.* Kinokuniya and North-Holland, 1985.

[Kaw86] N. Kawanaka. Generalized Gelfand-Graev representations of exceptional simple algebraic groups over a finite field. I. *Invent. Math.*, 84:575–616, 1986.

[KL79] D. Kazhdan and G. Lusztig. Representations of Coxeter groups and Hecke algebras. *Invent. Math.*, 53:165–184, 1979.

[LM02] B. Leclerc and H. Miyachi. Some closed formulas for canonical bases of Fock space. *Represent. Theory (electronic)*, 6:290–312, 2002.

[Lus81] G. Lusztig. On a theorem of Benson and Curtis. *J. Algebra*, 71:490–498, 1981.

[Lus03] G. Lusztig. *Hecke algebras with unequal parameters*, volume 18 of *Monograph Series*. CRM AMS, 2003.

[Miy01a] H. Miyachi. On the Iwahori-Hecke algebra of type F_4 at a 3-rd root of unity. *preprint*, 2001.

[Miy01b] H. Miyachi. Uno's conjecture for the exceptional Hecke algebras. *preprint*, 2001.

[Miy01c] H. Miyachi. *Unipotent Blocks of Finite General Linear Groups in Non-defining Characteristic.* PhD thesis, Chiba univ., Feb. 2001.

[Miy03a] H. Miyachi. Rouquier blocks in Chevalley groups of type E. *preprint*, 2003.

[Miy03b] H. Miyachi. A Scopes equivalence in type E. *preprint*, 2003.

[MP99] T.P. McDonough and C.A. Pallikaros. On the irreducible representations of the specializations of the generic Hecke algebra of type F_4. *J. Algebra*, 128:654–671, 1999.

[MP00] T.P. McDonough and C.A. Pallikaros. On the irreducible representations in characteristic 2 and 3 of the generic Hecke algebra of type F_4. *J. Algebra*, 226:857–864, 2000.

[Mül97] J. Müller. Decomposition numbers for generic Iwahori-Hecke algebras of non crystallographic type. *J. Algebra*, 189:125–149, 1997.

[Nar03] H. Naruse. Some letters on W-graphs for E_6. *private communications*, 2003.

[Pui90] L. Puig. Algèbres de source de certains blocs des groupes de Chevalley. *Astérisque*, 181-182:221–236, 1990.

[RR83] I. Reiten and C. Riedtmann. Skew group algebras in the representation theory of Artin algebras. *J. Algebra*, 92:224–282, 1983.

[RT99] A. Ram and D. Taylor. Explicit irreducible representations of the Iwahori-Hecke algebra of type F_4. *Manuscripta Math.*, 99:13–37, 1999.

[S+95] Martin Schönert et al. *GAP – Groups, Algorithms, and Programming.* Lehrstuhl D für Mathematik, Rheinisch Westfälische Technische Hochschule, Aachen, Germany, fifth edition, 1995.

[Sch85] Klaus-Dieter Schewe. *Blöcke exzeptioneller Chevalley-Gruppen. (German).* PhD thesis, Rheinische Friedrich-Wilhelm-Universität, Bonn, Bonner Mathematische Schriften, Universität Bonn,Mathematisches Institut, 1985.

[Tak90] K. Takahashi. The left cells and their W-graphs of Weyl group of type F_4. *Tokyo J. Math.*, 13:327–340, 1990.

[Tur02] W. Turner. Equivalent blocks of finite general linear groups in non-describing characteristic. *J. Algebra*, 247(1):244–267, 2002.

[Uno92] K. Uno. On representations of non-semisimple specialized Hecke algbras. *J. Algebra*, 149:287–312, 1992.

[Yam89] H. Yamane. Irreducible projective modules of the Hecke algebras of a finite Coxeter group. *J. Algebra*, 127:373–384, 1989.